

Cek sntiki 12

by Sntiki 12 Sntiki 12

Submission date: 06-Mar-2021 01:37PM (UTC-0800)

Submission ID: 1525992854

File name: SNTIKI_12.pdf (790.92K)

Word count: 4278

Character count: 18506

Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani¹, Maulidya Zawamii², Krisni Susilowati³, Yuslenita Muda⁴

Corry Corazon Marzuki⁵, Rahmawati⁶

^{1,2,3,4,5,6}Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau

Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293

e-mail: ¹khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, ⁵corry@uin-suska.ac.id, ⁶rahmawat@uin-suska.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai trace matriks segitiga ukuran 4×4 berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan trace matriks tersebut, dilakukan pencarian bentuk umum perpangkatan matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Selanjutnya, dari bentuk umum perpangkatan matriks tersebut, akan diperoleh rumus umum trace matriks segitiga ukuran 4×4 . Berdasarkan hasil dalam penelitian ini diperoleh rumus umum perpangkatan matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif, dan berpangkat bilangan bulat negatif, serta rumus umum trace matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Lebih lanjut, rumus ini akan diaplikasikan dalam bentuk penyelesaian soal mengenai trace matriks segitiga ukuran 4×4 berpangkat bilangan bulat.

Kata kunci: matriks segitiga, trace matriks, perpangkatan matriks.

32

Abstract

The main aim of this paper is to find a general formula of trace of integer power of 4×4 triangular matrix. To obtain its formula, first we find the general formula for integer power of 4×4 triangular matrix by using matrix multiplication rule. Furthermore, the general formula of trace of integer power of 4×4 triangular matrix is obtained directly. Its results show three formula is achieved simultaneously, which is, the form of trace of positive integer, negative integer and integer power of 4×4 triangular matrix. Additionally, we present the application of formula obtained by solving a problem which involve trace of integer power matrix.

Keywords: triangular matrix, trace matrix, power of matrix, matrix multiplication

1. Pendahuluan

Jumlahan elemen-elemen diagonal utama dari suatu matriks bujursangkar di dalam teori matriks dikenal dengan nama *trace* dari suatu matriks. Berdasarkan definisi, untuk mencari *trace* matriks bujursangkar tentu bukan merupakan suatu masalah. Namun, bagaimana jika *trace* yang akan dicari adalah *trace* matriks berpangkat? Secara logika, hal yang harus ditentukan terlebih dahulu adalah mencari bentuk umum perpangkatan matriks, kemudian rumus umum *trace* matriks berpangkat otomatis akan diperoleh. Bagaimana jika matriksnya berpangkat n , dengan n suatu bilangan bulat?

Datta [5] telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr(A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Selanjutnya Chu. Mt [4] telah membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Tahun 1990 Pan.V [9] pada makalahnya menentukan nilai eigen suatu matriks simetris, juga memberikan prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n) dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat. Menurut Zarelua [10] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(Ap^r) = Tr(Ap^{r-1}) \bmod(p^r)$$

Untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r adalah bilangan bulat. Artikel tersebut juga membahas mengenai invariant pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz.

Pahade [8] yang membahas mengenai *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dan hasil yang diperoleh yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n \text{ genap}$$

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}, n \text{ ganjil}$$

Selanjutnya Aryani [2] membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif yang menggunakan matriks Pahade [6]. Hasil yang diperoleh yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n \text{ genap}$$

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n} = \frac{\sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n}, n \text{ ganjil}$$

Aryani [3] mencoba menggunakan matriks 3×3 berbentuk khusus, berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

dan hasil yang didapatkan bentuk umum dari *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1) adalah sebagai berikut:

$$tr(A^n) = 1 + (a+b)^n$$

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, maka peneliti mencoba lagi mengenai *trace* matriks berpangkat pada matriks yang berbeda. Matriks yang digunakan kali ini adalah matriks segitiga bentuk khusus dengan ukuran 4×4 dan berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan berbentuk sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka. Beberapa landasan teori yang digunakan akan dipaparkan untuk mendapatkan hasil penelitian yang diinginkan. Namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan hasil penelitian ini.

- 1) Diberikan matriks segitiga 4×4 bentuk khusus pada Persamaan (2) dan Persamaan (3).
- 2) Menentukan perpangkatan masing-masing matriks dari pangkat -10 sampai pangkat 10.
- 3) Menduga bentuk umum matriks A_4^n dan B_4^n dengan n bilangan bulat.
- 4) Membuktikan bentuk umum A_4^n dan B_4^n dengan n bilangan bulat menggunakan induksi matematika.

- 5) Membuktikan bentuk umum $tr(A_4^n)$ dan $tr(B_4^n)$ dengan n bilangan bulat menggunakan pembuktian langsung.
- 6) Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_4^n)$ dan $tr(B_4^n)$ dengan n bilangan bulat dalam bentuk contoh soal.

2.1 Landasan Teori

Definisi 1 [1] Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga. Suatu matriks segitiga umum dapat ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ bentuk umum matriks segitiga atas.}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ bentuk umum matriks segitiga bawah}$$

Definisi 2 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ faktor}} \quad (n > 0)$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Teorema 1 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangan bulat, maka

$$\begin{aligned} \text{a. } A^r A^s &= A^{r+s} \\ (A^r)^s &= A^{rs} \end{aligned}$$

Definisi 3 [6] Matriks adalah jumlah elemen diagonal utama pada matriks bujursangkar. Jika matriks A adalah matriks bujursangkar ukuran $n \times n$, maka trace matriks A dinyatakan $tr(A)$. Jika diketahui matriks A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari matriks A adalah

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

sehingga,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{jj}$$

dengan a_{ij} merupakan elemen baris ke- i dan kolom ke- j .

Teorema 2 [6] Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [a_{ij}]$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan $\text{tr}(A)$, yaitu

$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

$$(i) \quad \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$(ii) \quad \text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$$

$$(iii) \quad \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$$

Induksi Matematika [7] Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n , maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

- 1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
- 2) Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n .

Langkah pertama dinamakan basis induksi, sedangkan langkah kedua dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ juga benar, asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n .

Teorema 3 [1] Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut; yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Definisi 4 [1] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} , maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks kofaktor dari A . Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A , dan dinyatakan sebagai $\text{adj}(A)$.

Definisi 5 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A .

Teorema 4 [1] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini diperoleh setelah mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penelitian di atas. Ada tiga bentuk umum yang diperoleh pada hasil penelitian ini.

3.1. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Positif

Teorema 5 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

Misal: $p(n): A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu:

$$A_4^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d + 1(1-1)a^{1-2}bc + \frac{(1-1)^3 - (1-1)}{6}a^{1-3}b^3 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_4^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \frac{(k-1)^3 - (k-1)}{6}a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}, \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d + (k+1)ka^{k-1}bc + \frac{(k^3-k)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A_4^{k+1} = A_4^k A_4 = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}a^{k-3}b^3 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k b + ka^{k-1}b & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)ka^{k-2}b^2 & a^k d + ka^{k-1}bc + ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^3 + ka^{k-1}d + k(k-1)a^{k-2}bc + \frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & a^k b + ka^{k-1}b & a^k c + ka^{k-1}b^2 + ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)ka^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & a^k b + ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d + (k+1)ka^{k-1}bc + \frac{(k^3-k)}{6}a^{k-2}b^3 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c + \frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan $p(k+1)$ maka Teorema 4 terbukti.

Teorema 6 Diberikan matriks segitiga bawah pada Persamaan (3), maka diperoleh:

$$B_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Bukti: Dengan cara yang sama pada Teorema 5, maka Teorema 6 terbukti.

3.2. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Negatif

Teorema 7 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu: $A_4^n A_4^{-n} = A_4^{-n} A_4^n = I$. Untuk membuktikan teorema tersebut maka diperlukan A_4^n dengan n bilangan bulat positif. Hal tersebut sudah ada pada Teorema 5, maka akan ditunjukkan $A_4^n A_4^{-n} = I$, yaitu:

$$A_4^n \cdot A_4^{-n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + \frac{1}{6}n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3(n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Misalkan

$$A_4^n A_4^{-n} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$i_{11} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{12} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1}nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{13} = \frac{\left(-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)a^n}{a^{n+2}} + \frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n} = 0$$

$$i_{14} = \frac{a^n \left(-nd + \frac{1}{6}n(n+1)abc - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3\right)}{a^{n+3}} + \frac{na^{n-1}b \left(-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}} + \frac{\left(na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\right)(-nb)}{a^{n+1}}$$

$$+ \frac{na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{1}{6}((n-1)^3 - (n-1))a^{n-3}b^3}{a^n} = 0$$

$$i_{21} = 0 \left(\frac{1}{a^n}\right) + a^n \cdot (0) + na^{n-1}b \cdot (0) + na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \cdot (0) = 0$$

$$i_{22} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{23} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1}nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{24} = \frac{a^n \left(-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2 \right)}{a^{n+2}} + \frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}c + \frac{47}{2}(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n} = 0$$

$$i_{31} = 0 \left(\frac{1}{a^n} \right) + 0 \cdot (0) + a^n \cdot (0) + na^{n-1}b \cdot (0) = 0$$

$$i_{32} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^{n+1}} + \frac{a^n a^{-1}nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{33} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{34} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^{n+1}} + \frac{a^n a^{-1}nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{41} = 0 \left(\frac{1}{a^n} \right) + 0 \cdot (0) + 0 \cdot (0) + a^n \cdot (0) = 0$$

$$i_{42} = 0 \left(-\frac{nb}{a^{n+1}} \right) + 0 \left(\frac{1}{a^n} \right) + 0 \cdot (0) + a^n \cdot (0) = 0$$

$$i_{43} = 0 \left(\frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \right) + 0 \left(-\frac{nb}{a^{n+1}} \right) + 0 \left(\frac{1}{a^n} \right) + a^n \cdot (0) = 0$$

$$i_{44} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

Berdasarkan hasil perkalian matriks tersebut maka diperoleh:

$$A_4^n A_4^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Hal yang sama berlaku juga untuk $A_4^{-n} A_4^n = I$. Berdasarkan pembuktian tersebut maka Teorema 7 terbukti. ■

Teorema 8 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (3), maka diperoleh:

$$B_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & -\frac{nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ -\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^2 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & -\frac{nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan cara yang sama pada Teorema 7 di atas, maka Teorema 8 terbukti.

3.3. Trace Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Teorema 9 Diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), maka diperoleh:

a. Trace matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$tr(A_4^n) = tr(B_4^n) = 4(a^n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

b. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

a.
$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Bukti:

b. *trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilangan bulat positif, Berdasarkan Teorema 5 dan Teorema 6 diketahui bahwa entri-

entri pada diagonal utamanya bernilai a^n dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_4^n) = tr(B_4^n) = a^n + a^n + a^n + a^n = 4(a^n)$$

b. *trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan Persamaan (3), berpangkat bilangan bulat negatif, Berdasarkan Teorema 7 dan Teorema 8 diketahui bahwa

entri-entri pada diagonal utamanya bernilai sama yaitu $\frac{1}{a^n}$ dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Teorema 9 terbukti •

3.4. Aplikasi *trace* Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat

Contoh 1. Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, hitunglah A_4^9 dan $tr(A_4^9)$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 5 diperoleh:

$$A_4^9 = \begin{bmatrix} (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) & (-93.192.192) \\ 0 & (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) \\ 0 & 0 & (-262.144) & (-3.538.944) \\ 0 & 0 & 0 & (-262.144) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 9 maka:

$$tr(A_4^9) = tr \begin{bmatrix} (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) & (-93.192.192) \\ 0 & (-262.144) & (-3.538.944) & (-22.413.312) \\ 0 & 0 & (-262.144) & (-3.538.944) \\ 0 & 0 & 0 & (-262.144) \end{bmatrix} = 4(-262.144) = (-1.048.576)$$

Contoh 2. Diberikan matriks $A_4 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

maka dengan menggunakan Teorema 7 sehingga diperoleh:

$$A_4^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} & \frac{\frac{1}{2}(2+1)(-1^2) - (2)(-4)(-3)}{(-4)^{2+2}} & \frac{-2(2+1)(2+2)(-1^3) - 2(-4)^2(-2) + 2(2+1)(-4)(-1)(-3)}{6(-4)^{2+3}} \\ 0 & \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} & \frac{\frac{1}{2}(2+1)(-1^2) - (2)(-4)(-3)}{(-4)^{2+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-4)^2} & \frac{-2(-1)}{(-4)^{2+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(-4)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{2}{64} & \frac{21}{256} & \frac{-4}{1024} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{2}{64} & \frac{21}{256} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{2}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Teorema 9 diperoleh:

$$tr(A_4^{-2}) = 4 \frac{1}{(-4)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Contoh 3. Diberikan matriks $B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ maka dengan menggunakan Teorema 8

sehingga

$$B_4^{-4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{26}{1} & \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{-12}{1} & \frac{26}{1} & \frac{-8}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Teorema 9 diperoleh: $tr(B_4^{-2}) = 4 \frac{1}{(1)^2} = 4$

41 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan di atas, maka terdapat teorema-teorema yang menjadi kesimpulan dari hasil yang diperoleh. Jika diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (2) dan (3), maka diperoleh:

a. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, yaitu:

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$B_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

b. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 4×4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, yaitu:

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{15}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

$$B_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3 - na^2d + n(n+1)abc}{a^{n+3}} & \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2 - nac}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

c. Bentuk Umum Trace Matriks Segitiga 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat, yaitu:

$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = 4(a^n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$tr(A_4^{-n}) = tr(B_4^{-n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Daftar Pustaka

- [1] Anton H, Rorres C. Dasar-Dasar Aljabar linear Versi Aplikasi. Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga. 2004.
- [2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2017;3 (2).
- [3] Aryani F, Andesta R. Trace Matriks Berbentuk Khusus 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2020;6 (1).
- [4] Chu MT, Raleigh. Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix. *Computing*. 1985; 35: 261-268.
- [5] Datta BN, Datta K. An Algorithm for Computing Power of a Hessenberg Matrix and its Applications, *Linear Algebra and its Application*. 1976; 14: 273-284.
- [6] Gentle JE. Matrix Algebra. New York: Springer. 2007.
- [7] Schutz S, Marc L. Matematika Diskrit. Jakarta: Salemba Teknik. 2001.
- [8] Pahade J, Jha M. Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 matrices. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*. 2015; 5: 150-155.
- [9] Pan V. Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symetric Matrix. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990; 20: 17-22.
- [10] Zarelua AV. On Congruences for the Trace of Power of Some Matrices. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2008; 263: 78-98.

Cek sntiki 12

ORIGINALITY REPORT

18%

SIMILARITY INDEX

15%

INTERNET SOURCES

8%

PUBLICATIONS

4%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1

subintaracompany.blogspot.com

Internet Source

1%

2

espace.library.uq.edu.au

Internet Source

1%

3

missblank28.blogspot.com

Internet Source

1%

4

maps.b33franch.net

Internet Source

1%

5

repositori.uin-alauddin.ac.id

Internet Source

1%

6

www.matematik.lu.se

Internet Source

1%

7

doczz.net

Internet Source

1%

8

smatika.blogspot.com

Internet Source

1%

9

fmipa.ilearn.unand.ac.id

Internet Source

<1%

10

lib.ui.ac.id

Internet Source

<1 %

11

markiber.blogspot.com

Internet Source

<1 %

12

Himmatul Mursyidah. "ALGORITMA POLINOMIAL MINIMUM UNTUK MEMBENTUK MATRIKS DIAGONAL DARI MATRIKS PERSEGI", AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika, 2017

Publication

<1 %

13

U. Abbas, R. K. Sheth. "Strong clustering of underdense regions and the environmental dependence of clustering from Gaussian initial conditions", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2007

Publication

<1 %

14

Submitted to Universitas PGRI Yogyakarta

Student Paper

<1 %

15

bbs.speedfull.com

Internet Source

<1 %

16

tiptiktak.com

Internet Source

<1 %

17

A K Amir, G Jeriko, M Jusmawati. "A method for calculating the sum of diagonal and anti diagonal of power matrices without explicitly calculating its matrices", Journal of Physics:

<1 %

18

Submitted to Universitas Muhammadiyah
Surakarta

Student Paper

<1 %

19

Submitted to Democritus University

Student Paper

<1 %

20

www.slideserve.com

Internet Source

<1 %

21

M. T. Chu. "Symbolische Berechnung der Spur
einer Potenz einer Tridiagonalmatrix",
Computing, 1985

Publication

<1 %

22

Maria Regina Vindasari, Helmi, Nurfitri Imro'ah.
"PERBANDINGAN KINERJA PETA KENDALI
DECISION ON BELIEF (DOB) DAN PETA
KENDALI U PADA PRODUKSI CRUMB
RUBBER", Bimaster : Buletin Ilmiah
Matematika, Statistika dan Terapannya, 2020

Publication

<1 %

23

pra.aps.org

Internet Source

<1 %

24

Submitted to Kafkas Üniversitesi

Student Paper

<1 %

25

Submitted to North West University

Student Paper

<1 %

26	jglobal.jst.go.jp Internet Source	<1 %
27	www.bestreferat.ru Internet Source	<1 %
28	www.mathnet.ru Internet Source	<1 %
29	www.watercommission.co.uk Internet Source	<1 %
30	Riswan Efendi, Zuhaimy Ismail, Nor Haniza Sarmin, Mustafa Mat Deris. "A reversal model of fuzzy time series in regional load forecasting", International Journal of Energy and Statistics, 2015 Publication	<1 %
31	repository.radenintan.ac.id Internet Source	<1 %
32	www.repositori.uji.es Internet Source	<1 %
33	www98.griffith.edu.au Internet Source	<1 %
34	Submitted to Fareham College Student Paper	<1 %
35	R.D. Cideciyan, F. Dolivo, R. Hermann, W. Hirt, W. Schott. "A PRML system for digital magnetic	<1 %

recording", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1992

Publication

36	bahasaindolearners.blogspot.com Internet Source	<1 %
37	dx.doi.org Internet Source	<1 %
38	file.upi.edu Internet Source	<1 %
39	gcect.ac.in Internet Source	<1 %
40	journal.publication-center.com Internet Source	<1 %
41	www.akuntansipendidik.com Internet Source	<1 %
42	www.smartstat.info Internet Source	<1 %
43	eprints.ums.ac.id Internet Source	<1 %
44	ftrilailimasruroh309.blogspot.com Internet Source	<1 %
45	garuda.ristekbrin.go.id Internet Source	<1 %

hdl.handle.net

46

Internet Source

<1 %

47

oshiete1.nifty.com

Internet Source

<1 %

48

www.docme.ru

Internet Source

<1 %

49

www.motie.go.kr

Internet Source

<1 %

50

International Journal of Numerical Methods for
Heat & Fluid Flow, Volume 16, Issue 6 (2006-
09-19)

Publication

<1 %

51

dendyramadhani60.blogspot.com

Internet Source

<1 %

Exclude quotes

Off

Exclude matches

Off

Exclude bibliography

Off